

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Минцаев Магомед Шавалович

Должность: Ректор

Дата подписания: 25.11.2019 14:38:02

Уникальный программный ключ:

236bcc35c296f119d6aafdc22836b21dbf52dbc07871a86865a582559fa4304cc

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Филиал в г. Стерлитамак

Кафедра автоматизированных технологических и информационных систем

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ И ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

Учебно-методическое пособие
по выполнению самостоятельной и практической работы по дисциплине
«Основы математического моделирования.
Модуль 1. Методы математического моделирования»

Уфа
2018

Учебно-методическое пособие по выполнению самостоятельной и практической работы по дисциплинам «Основы математического моделирования. Модуль 1. Методы математического моделирования».

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 27.04.04 – Управление в технических системах и 21.05.06 – Нефтегазовая техника и технологии.

Составитель: Рахман П.А., к.т.н., доцент каф. АТИС

Рецензенты: Быковский Н.А., к.т.н., доцент каф. АТИС
Кадыров Р.Р., к.т.н., доцент каф. АТИС

1. Математическое моделирование электронных схем

1.1. Математическое моделирование полосового фильтра с мостом Вина

Рассмотрим моделирование активного полосового фильтра второго порядка с мостом Вина (рис. 1.1), в том числе теоретическое исследование с выводом аналитических формул для частотных и переходных характеристик фильтра, а также математическое моделирование фильтра в среде Maple.

1.1.1. Теоретический анализ полосового фильтра и расчет его характеристик

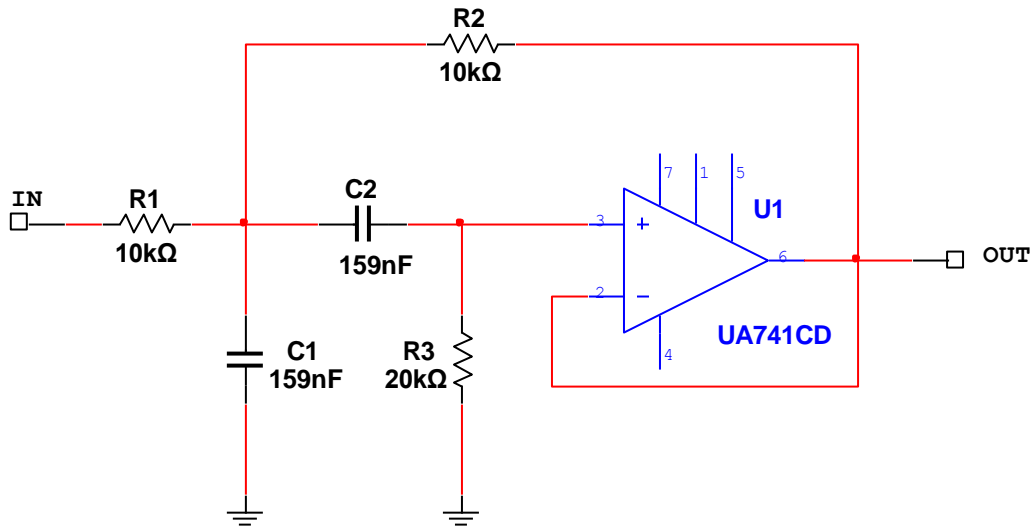


Рис. 1.1. Схема электрическая принципиальная активного полосового фильтра.

Учитывая, что операционный усилитель охвачен отрицательной обратной связью $U_- = U_{OUT}$, а также то, что согласно упрощенной модели ОУ его выходное напряжение $U_{OUT} = K_p(U_+ - U_-)$, и считая коэффициент усиления ОУ бесконечным $K_p \rightarrow \infty$, имеем $U_{OUT} = U_+$ (повторитель напряжения).

Считая, что входной ток схемы течет через резистор R_1 и далее растекается на три тока: через резистор R_2 , через конденсатор C_1 и через конденсатор C_2 , можем составить в комплексной форме уравнение для токов, выраженных через соответствующие напряжения, обозначив напряжение U_* в точке соединения резисторов R_1 , R_2 и конденсаторов C_1 , C_2 .

$$\text{Тогда имеем: } \frac{U_{IN} - U_*}{R_1} = \frac{U_* - U_{OUT}}{R_2} + \frac{U_*}{1/(pC_1)} + \frac{U_* - U_+}{1/(pC_2)}$$

$$\text{Теперь также заметим, что } \frac{U_*}{R_3 + 1/(pC_2)} = \frac{U_+}{R_3}, \text{ и учтем, что } U_+ = U_{OUT}.$$

Тогда, выражая из уравнения выходное напряжение, получаем:

$$U_{OUT}(p) = U_{IN}(p) \left(\frac{p \frac{1}{R_1 C_1}}{p^2 + p \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_3 C_1} + \frac{1}{R_3 C_2} \right) + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}} \right). \quad (1.1)$$

Теперь, учитывая, что параметры $R_1 = R_2 = R = 10 \text{ кОм}$, $R_3 = 2R = 20 \text{ кОм}$, $C_1 = C_2 = C = 159 \text{ нФ}$, получаем комплексную передаточную характеристику:

$$W(p) = \frac{U_{\text{OUT}}(p)}{U_{\text{IN}}(p)} = \frac{p \frac{1}{RC}}{\left(p + \frac{1}{RC}\right)^2} ; \begin{cases} C_1 = C_2 = C; \\ R_1 = R_2 = R; \\ R_3 = 2R. \end{cases} \quad (1.2)$$

Приравняв $p = jw$ и выделяя в явном виде действительную и мнимую части комплексной передаточной функции, получаем:

$$W(jw) = \frac{w}{RC} \frac{\left(\frac{2w}{RC} - j\left(w^2 - \frac{1}{(RC)^2}\right)\right)}{\left(w^2 + \frac{1}{(RC)^2}\right)^2}. \quad (1.3)$$

Выражая круговую частоту $w = 2\pi f$ и обозначая $f_c = 1/(2\pi RC)$, имеем:

$$W(j2\pi f) = ff_c \frac{\left(2ff_c - j(f^2 - f_c^2)\right)}{(f^2 + f_c^2)^2}. \quad (1.4)$$

Выражая модуль комплексной передаточной функции, получаем амплитудно-частотную характеристику:

$$A(f) = \sqrt{(\text{Re}(W(j2\pi f)))^2 + (\text{Im}(W(j2\pi f)))^2} = \frac{ff_c}{f^2 + f_c^2} ; \begin{cases} A(0) = 0; \\ A(\infty) = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Выражая аргумент комплексной передаточной функции, получаем фазово-частотную характеристику:

$$\Psi(f) = \arctg\left(\frac{\text{Im}(W(j2\pi f))}{\text{Re}(W(j2\pi f))}\right) = \arctg\left(\frac{f_c^2 - f^2}{2ff_c}\right) ; \begin{cases} \Psi(0) = +90^\circ; \\ \Psi(\infty) = -90^\circ. \end{cases} \quad (1.6)$$

Теперь найдем резонансную частоту f^* фильтра из условия $A(f) \rightarrow \max$. Функция имеет единственный экстремум (максимум), и его легко найти, приравняв производную функции к нулю $\frac{dA(f^*)}{df} = 0$. В итоге получаем:

$$f^* = f_c = \frac{1}{2\pi RC} \approx 100 \text{ Гц} ; \begin{cases} A(f_c) = 1/2; \\ \Psi(f_c) = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Кроме того, можем найти нижнюю f_L (low cutoff) и верхнюю f_H (high cutoff) частоты среза из условия $A(f_L) = A(f_H) = A(f^*)/\sqrt{2}$, то есть, частоты, при которых АЧХ имеет значения в $\sqrt{2}$ меньше, чем при резонансной частоте.

Нижняя частота среза фильтра:

$$f_L = f_c(\sqrt{2} - 1) \approx 41 \text{ Гц} ; \begin{cases} A(f_L) = 1/(2\sqrt{2}); \\ \Psi(f_L) = +45^\circ. \end{cases} \quad (1.8)$$

Верхняя частота среза фильтра:

$$f_H = f_c(\sqrt{2} + 1) \approx 241 \text{ Гц} ; \begin{cases} A(f_H) = 1/(2\sqrt{2}); \\ \Psi(f_H) = -45^\circ. \end{cases} \quad (1.9)$$

Кроме того, полоса пропускания фильтра (filter bandwidth):

$$\Delta f_{\text{BW}} = f_H - f_L = 2f_c \approx 200 \text{ Гц}. \quad (1.10)$$

Для того чтобы найти переходную функцию $h(t)$, являющуюся откликом полосового фильтра на единичный входной импульс $u_{\text{IN}}(t) = 1(t)$, необходимо рассмотреть соответствующее выходное напряжение $H(p)$ в комплексной форме. Учитывая, что $U_{\text{OUT}}(p) = W(p)U_{\text{IN}}(p)$, а $U_{\text{IN}}(p) = 1/p$, получаем:

$$H(p) = W(p) \frac{1}{p} = \frac{1}{RC} \frac{1}{\left(p + \frac{1}{RC}\right)^2}. \quad (1.11)$$

Тогда, выполняя обратное преобразование Лапласа, и, обозначив $\beta = \frac{1}{RC}$, получаем:

$$h(t) = \beta t e^{-\beta t}. \quad (1.12)$$

Переходная функция $h(t)$ позволяет рассчитать выходной сигнал для любого входного сигнала, используя тождество $U_{\text{OUT}}(p) = pH(p)U_{\text{IN}}(p)$ в комплексной форме, из которого следуют две формы интеграла Дюамеля:

$$\begin{aligned} u_{\text{OUT}}(t) &= h(0)u_{\text{IN}}(t) + \int_0^t \frac{dh(\tau)}{d\tau} u_{\text{IN}}(t-\tau) d\tau; \\ u_{\text{OUT}}(t) &= h(t)u_{\text{IN}}(0) + \int_0^t \frac{du_{\text{IN}}(\tau)}{d\tau} h(t-\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Так, например, для входного синусоидального сигнала $u_{\text{IN}}(t) = \sin(\omega t + \varphi)$, функция выходного сигнала выглядит следующим образом:

$$u_{\text{OUT}}(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \varphi + \Psi(\omega)) - e^{-\beta t} (t\beta E(\omega) \cos(\varphi + \Theta(\omega)) + A(\omega) \sin(\varphi + \Psi(\omega)));$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{RC}; \quad A(\omega) = \frac{\beta\omega}{\beta^2 + \omega^2}; \quad \Psi(\omega) = \arctg\left(\frac{\beta^2 - \omega^2}{2\beta\omega}\right); \\ E(\omega) &= \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}}; \quad \Theta(\omega) = \arctg\left(\frac{\beta}{\omega}\right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Особо отметим, что при достаточно большом времени $t \gg \beta$, множитель $e^{-\beta t} \rightarrow 0$, и выходной сигнал превращается также в синусоидальное колебание, масштабированное по амплитуде в $A(\omega)$ раз и сдвинутое по фазе на $\Psi(\omega)$ относительно входного колебания:

$$u_{\text{OUT}}(t) \rightarrow A(\omega) \sin(\omega t + \varphi + \Psi(\omega)). \quad (1.15)$$

1.1.2. Задание на математическое моделирование полосового фильтра в среде Maple

1. Запустить среду математического моделирования Maple версии 15.00.
2. Инициализировать среду и подключить модули интегральных преобразований и построения графиков следующими командами:
`> restart; with(plots): with(inttrans):`
3. Задать комплексную передаточную функцию фильтра.
`> W:= (p) -> (beta*p)/(p+beta)^2;`
4. Задать АЧХ и ФЧХ, как модуль и аргумент передаточной функции.
`> Amp:= (w) -> abs(W(I*w));`
`> Phase:= (w) -> argument(W(I*w));`
5. Также задать АЧХ и ФЧХ по выведенным выше аналитическим формулам.
`> A:= (w) -> (w*beta)/(beta^2+w^2);`
`> P:= (w) -> arctan((beta^2-w^2)/(2*beta*w));`
6. Задать переходную функцию через обратное преобразование Лапласа $H(p) = W(p) / p$.
`> h:= (t) -> invlaplace(W(p)/p,p,t);`
7. Также задать переходную функцию по выведенной выше аналитической формуле.
`> hh:= (t) -> t*beta*exp(-beta*t);`
8. Задать входную синусоидальную функцию.
`> x:= (t) -> sin(psi*t+phi);`
9. Задать выходную функцию через интеграл Дюамеля.
`> y:= (mu) -> int(h(mu-tau)*diff(x(tau),tau),tau=0..mu) + h(mu)*x(0);`
10. Задать выходную функцию по выведенной выше аналитической формуле.
`> E:= (w) -> beta/sqrt(beta^2+w^2); Q:= (w) -> arctan(beta/w);`
`> yy:= (t) -> A(psi)*sin(psi*t+phi+P(psi))-exp(-beta*t)*(t*beta*E(psi)*`
`cos(phi+Q(psi))+A(psi)*sin(phi+P(psi)));`
11. Задать резонансную частоту фильтра f_c и, соответственно, вычислить параметр β .
`> f[c]:= 100; beta:= 2*Pi*f[c];`
12. Задать круговую частоту и фазу для входного синусоидального колебания.
`> psi:= 2*Pi*100; phi:= 0;`
13. Построить график АЧХ, заданной как модуль передаточной функции.
`> semilogplot(Amp(2*Pi*f), f=1..f[c]^2, color=navy, numpoints=1000,`
`thickness=2, legend="Amplitude-frequency characteristic");`
14. Построить график АЧХ, заданной по аналитической формуле.
`> semilogplot(A(2*Pi*f), f=1..f[c]^2, color=maroon, numpoints=1000,`
`thickness=2, legend="Amplitude-frequency characteristic");`
15. Построить график ФЧХ, заданной как аргумент передаточной функции.
`> semilogplot((180/Pi)*Phase(2*Pi*f), f=1..f[c]^2, color=navy,`
`numpoints=1000, thickness=2, legend="Phase-frequency characteristic");`
16. Построить график ФЧХ, заданной по аналитической формуле.
`> semilogplot((180/Pi)*P(2*Pi*f), f=1..f[c]^2, color=maroon,`
`numpoints=1000, thickness=2, legend="Amplitude-frequency characteristic");`
17. Построить графики единичного входного импульса и выходного отклика по переходной функции, заданной через обратное преобразование Лапласа.
`> plot([Heaviside(t), h(t)], t=0..0.05, color=[green, navy], numpoints=1000,`
`thickness=[2,2], legend=["Heaviside input", "Response output"]);`
18. Построить графики единичного входного импульса и выходного отклика по переходной функции, заданной по аналитической формуле.
`> plot([Heaviside(t), hh(t)], t=0..0.05, color=[green, maroon], numpoints=1000,`
`thickness=[2,2], legend=["Heaviside input", "Response output"]);`
19. Построить графики входного синусоидального колебания и выходной функции, заданной через интеграл Дюамеля.
`> plot([x(t), y(t)], t=0..0.05, color=[green, navy], numpoints=1000,`
`thickness=[2,2], legend=["Harmonic input", "Response output"]);`
20. Построить графики входного синусоидального колебания и выходной функции, заданной по аналитической формуле.
`> plot([x(t), yy(t)], t=0..0.05, color=[green, maroon], numpoints=1000,`
`thickness=[2,2], legend=["Harmonic input", "Response output"]);`

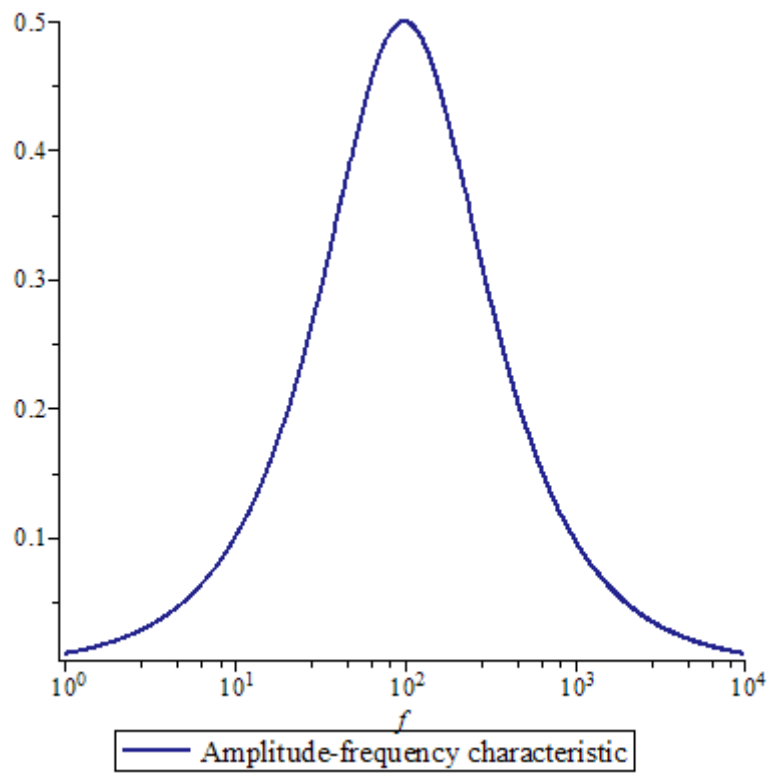


Рис. 1.2. График функции амплитудно-частотной характеристики.

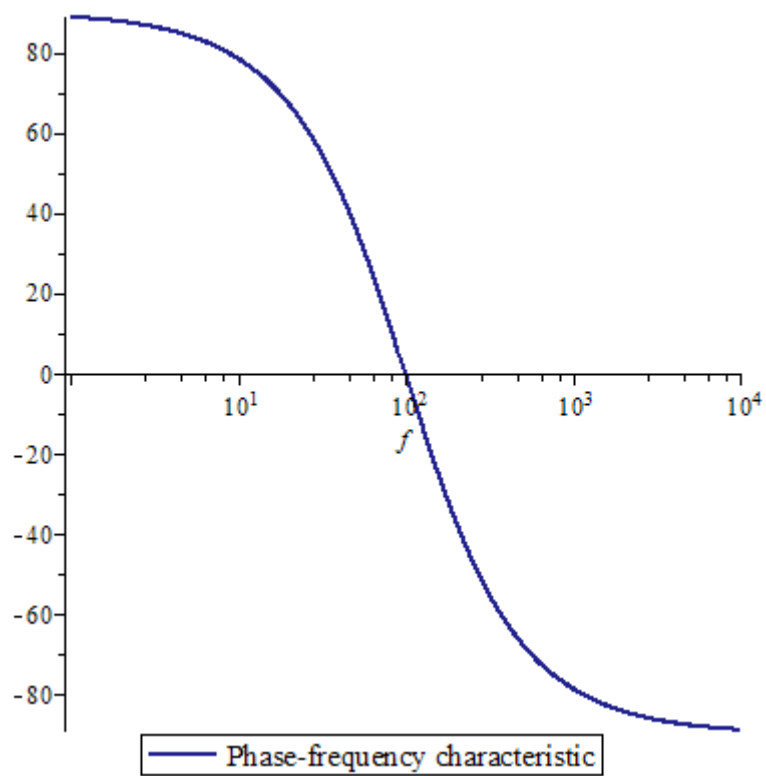


Рис. 1.3. График функции фазово-частотной характеристики.

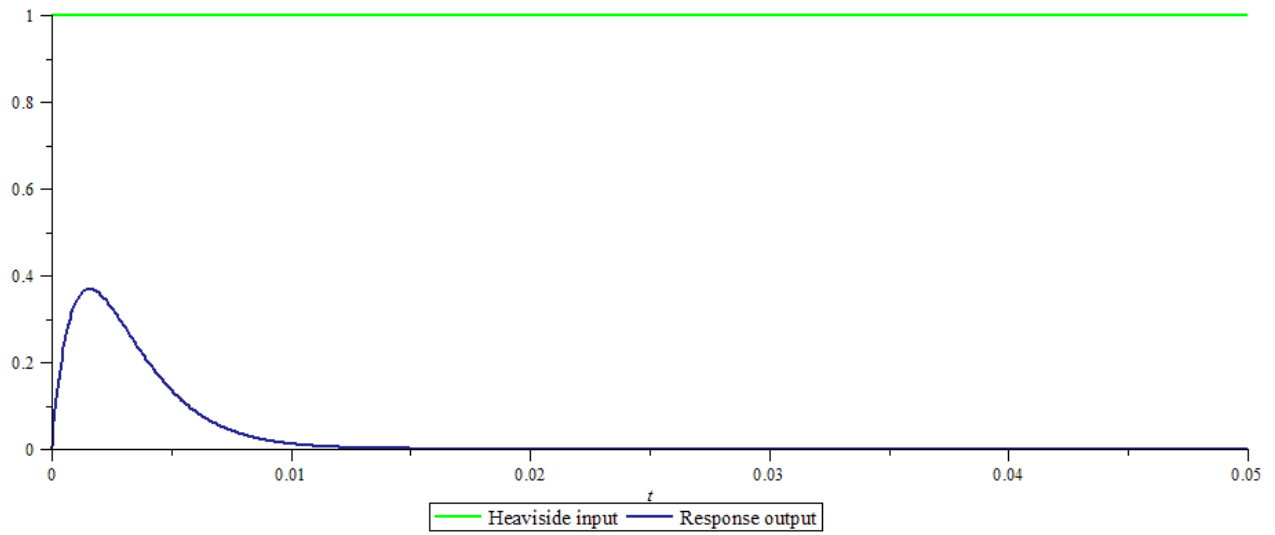


Рис. 1.4. Графики входной единичной функции и рассчитанной выходной переходной функции.

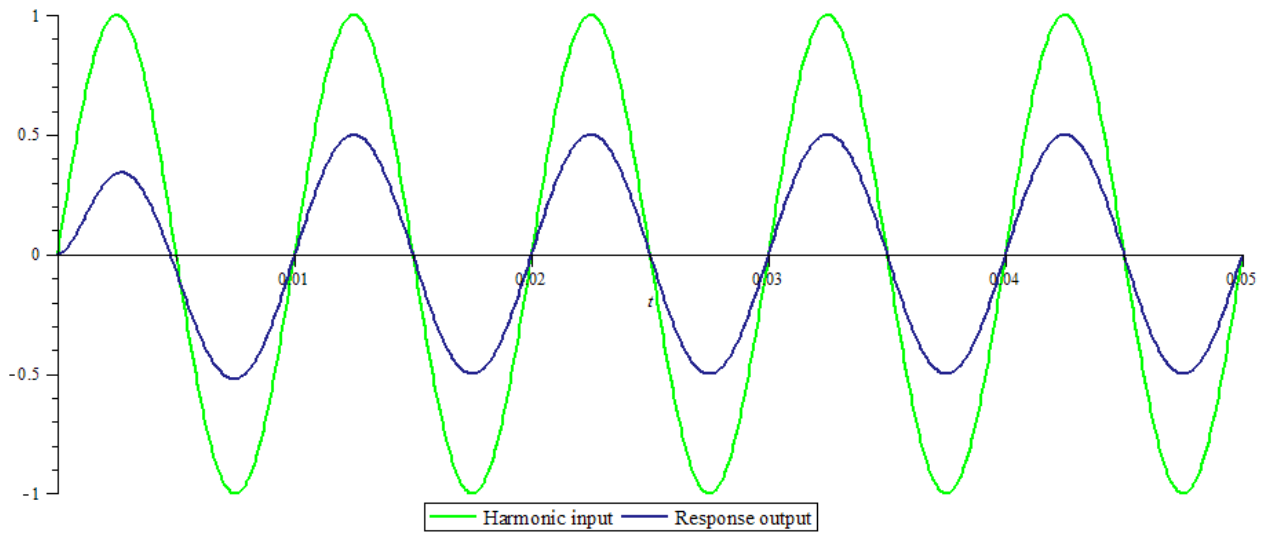


Рис. 1.5. Графики входной синусоидальной функции и рассчитанной выходной функции на резонансной частоте.

1.2. Математическое и имитационное моделирование асимметричного мультивибратора на базе операционного усилителя

Рассмотрим моделирование асимметричного мультивибратора, построенного на базе операционного усилителя (рис. 2.1), в том числе теоретическое исследование с выводом аналитических формул для расчета временных характеристик мультивибратора, математическое моделирование мультивибратора в среде Maple.

1.2.1. Теоретическое исследование мультивибратора и расчет характеристик

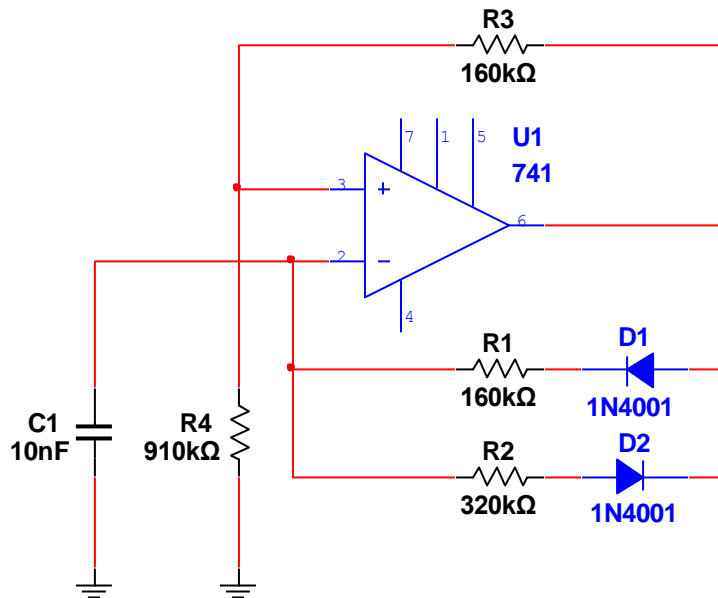


Рис. 2.1. Схема электрическая принципиальная асимметричного мультивибратора.

В силу положительной обратной связи схема имеет два устойчивых состояния с напряжениями на выходе операционного усилителя $U_{\text{OUT}} = U_{\text{SAT}}^+$ и $U_{\text{OUT}} = U_{\text{SAT}}^-$. Схема переключается, когда напряжение на конденсаторе U_C достигает пороговых напряжений U_{TH}^+ и U_{TH}^- . Если напряжение на конденсаторе находится между двумя пороговыми значениями, то схема сохраняет текущее состояние.

Соответственно, граф состояний мультивибратора представлен на рис. 2.2.

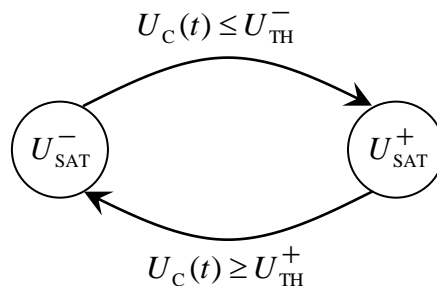


Рис. 2.2. Граф состояний асимметричного мультивибратора.

Где, $U_{\text{SAT}}^+ > 0$ и $U_{\text{SAT}}^- < 0$, максимальное по модулю положительное и отрицательное выходное напряжение операционного усилителя.

Соответственно, пороговые напряжения переключения также определяются этими напряжениями и параметрами резисторного делителя в положительной обратной связи:

$$\begin{cases} U_{\text{TH}}^+ = \frac{R_4}{R_3 + R_4} U_{\text{SAT}}^+; \\ U_{\text{TH}}^- = \frac{R_4}{R_3 + R_4} U_{\text{SAT}}^-. \end{cases} \quad (2.1)$$

При включении схемы напряжение на конденсаторе равно нулю и в зависимости от того, в каком состоянии окажется схема в начальный момент времени, он будет заряжаться в сторону либо положительного, либо отрицательного напряжения. Для определенности будем считать, что схема в начальный момент времени оказывается в состоянии U_{SAT}^+ .

Закон изменения напряжения на конденсаторе описывается дифференциальным уравнением. Учтем, что в состоянии $U_{\text{OUT}} = U_{\text{SAT}}^+$, напряжение на выходе больше напряжения на конденсаторе, открыт диод D_1 и ток течет через резистор R_1 , а в состоянии $U_{\text{OUT}} = U_{\text{SAT}}^-$, напряжение на выходе меньше напряжения на конденсаторе, открыт диод D_2 и ток течет через резистор R_2 . Учтем также, что на диодах имеет место быть падение напряжения, равное U_{FD} , и в состоянии $U_{\text{OUT}} = U_{\text{SAT}}^+$ на R_1C -цепочку действует постоянное входное напряжение $U_{\text{IN}} = U_{\text{SAT}}^+ - U_{\text{FD}}$, а в состоянии $U_{\text{OUT}} = U_{\text{SAT}}^-$ на R_2C -цепочку действует постоянное входное напряжение $U_{\text{IN}} = U_{\text{SAT}}^- + U_{\text{FD}}$.

С учетом вышесказанного имеем:

$$RC \frac{dU_C(t)}{dt} + U_C(t) = U_{\text{IN}} \quad ; \quad \begin{cases} R = R_1, & U_{\text{IN}} = U_{\text{SAT}}^+ - U_{\text{FD}}; \\ R = R_2, & U_{\text{IN}} = U_{\text{SAT}}^- + U_{\text{FD}}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Решение дифференциального уравнения дает:

$$U_C(t) = U_{\text{IN}} - (U_{\text{IN}} - U_C(0))e^{-t/(RC)} \quad ; \quad \begin{cases} R = R_1, & U_{\text{IN}} = U_{\text{SAT}}^+ - U_{\text{FD}}; \\ R = R_2, & U_{\text{IN}} = U_{\text{SAT}}^- + U_{\text{FD}}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Тогда, если при включении схемы, она оказывается в состоянии $U_{\text{OUT}} = U_{\text{SAT}}^+$, то конденсатор начинает заряжаться с напряжения $U_C(0) = 0$ до положительного порогового напряжения U_{TH}^+ через резистор R_1 по закону:

$$U_C(t) = \left(U_{\text{SAT}}^+ - U_{\text{FD}} \right) \left(1 - e^{-t/(R_1C)} \right). \quad (2.4)$$

Соответственно, из порогового условия для напряжений $U_C(\tau_0^+) = U_{\text{TH}}^+$ находим время «первоначального» заряда конденсатора:

$$\tau_0^+ = R_1 C \ln \left(1 + \frac{R_4 U_{\text{SAT}}^+}{R_3 U_{\text{SAT}}^+ - (R_3 + R_4) U_{\text{FD}}} \right). \quad (2.5)$$

Далее схема оказывается в состоянии $U_{\text{OUT}} = U_{\text{SAT}}^-$, и конденсатор начинает разряжаться от напряжения $U_C(0) = U_{\text{TH}}^+$ до отрицательного порогового напряжения U_{TH}^- через резистор R_2 по закону:

$$U_C(t) = \left(U_{\text{SAT}}^- + U_{\text{FD}} \right) - \left(\left(U_{\text{SAT}}^- + U_{\text{FD}} \right) - U_{\text{TH}}^+ \right) e^{-t/(R_2C)}. \quad (2.6)$$

Из порогового условия $U_C(\tau^-) = U_{\text{TH}}^-$ находим время разряда конденсатора:

$$\tau^- = R_2 C \ln \left(1 + \frac{R_4 (U_{\text{SAT}}^- - U_{\text{SAT}}^+)}{R_3 U_{\text{SAT}}^- + (R_3 + R_4) U_{\text{FD}}} \right). \quad (2.7)$$

Далее схема оказывается в состоянии $U_{\text{OUT}} = U_{\text{SAT}}^+$, и конденсатор начинает заряжаться от напряжения $U_C(0) = U_{\text{TH}}^-$ до положительного порогового напряжения U_{TH}^+ через резистор R_1 по закону:

$$U_C(t) = \left(U_{\text{SAT}}^+ - U_{\text{FD}} \right) - \left(\left(U_{\text{SAT}}^+ - U_{\text{FD}} \right) - U_{\text{TH}}^- \right) e^{-t/(R_1 C)}. \quad (2.8)$$

Из порогового условия $U_C(\tau^+) = U_{\text{TH}}^+$ находим время заряда конденсатора:

$$\tau^+ = R_1 C \ln \left(1 + \frac{R_4 (U_{\text{SAT}}^+ - U_{\text{SAT}}^-)}{R_3 U_{\text{SAT}}^+ - (R_3 + R_4) U_{\text{FD}}} \right). \quad (2.9)$$

После этого повторяется разряд, а затем заряд конденсатора и так далее.

Если, упрощенно считать максимальные выходные напряжения равными по модулю и противоположными по знаку, то обозначив $U_{\text{SAT}} = U_{\text{SAT}}^+ = -U_{\text{SAT}}^-$, формулы для расчета временных параметров можно немного упростить:

$$\tau_0^+ = R_1 C \ln \left(1 + \frac{R_4 U_{\text{SAT}}}{R_3 U_{\text{SAT}} - (R_3 + R_4) U_{\text{FD}}} \right). \quad (2.10)$$

$$\tau^- = R_2 C \ln \left(1 + \frac{2R_4 U_{\text{SAT}}}{R_3 U_{\text{SAT}} - (R_3 + R_4) U_{\text{FD}}} \right). \quad (2.11)$$

$$\tau^+ = R_1 C \ln \left(1 + \frac{2R_4 U_{\text{SAT}}}{R_3 U_{\text{SAT}} - (R_3 + R_4) U_{\text{FD}}} \right). \quad (2.12)$$

Тогда, период колебаний можно определить по формуле:

$$T = \tau^+ + \tau^- = (R_1 + R_2) C \ln \left(1 + \frac{2R_4 U_{\text{SAT}}}{R_3 U_{\text{SAT}} - (R_3 + R_4) U_{\text{FD}}} \right). \quad (2.13)$$

Соответственно, скважность импульсов можно определить по формуле:

$$Q = T / \tau^+ = 1 + \frac{R_2}{R_1}. \quad (2.14)$$

Типовое напряжение питания для ОУ составляет: ± 15 В. Максимальное выходное напряжение по модулю при таком напряжении питания для ОУ UA741 составляет $U_{\text{SAT}} \approx 14,1$ В. Соответственно, $U_{\text{SAT}}^+ = 14,1$ В и $U_{\text{SAT}}^- = -14,1$ В.

Что касается, падения напряжения на диодах, поскольку резисторы R_1 и R_2 имеют большие значения, то через диоды протекают достаточно маленькие токи, при которых падение напряжения на них минимально, и для диодов 1N4001 составляет $U_{\text{FD}} \approx 0,4$ В.

Тогда, с учетом этого, а также заданных на схеме значений сопротивлений резисторов $R_1 = 160\text{кОм}$, $R_2 = 320\text{кОм}$, $R_3 = 160\text{кОм}$, $R_4 = 910\text{кОм}$ и емкости конденсатора $C = 10\text{нф}$, мы можем рассчитать временные параметры.

Время «первоначального» заряда конденсатора:

$$\tau_0^+ = R_1 C \ln \left(1 + \frac{R_4 \times 14,1}{R_3 \times 14,1 - (R_3 + R_4) \times 0,4} \right) \approx 3,3 \text{ мс.}$$

Время последующих разрядов конденсатора:

$$\tau^- = R_2 C \ln \left(1 + \frac{2R_4 \times 14,1}{R_3 \times 14,1 - (R_3 + R_4) \times 0,4} \right) \approx 8,6 \text{ мс.}$$

Время последующих зарядов конденсатора:

$$\tau^+ = R_1 C \ln \left(1 + \frac{2R_4 \times 14,1}{R_3 \times 14,1 - (R_3 + R_4) \times 0,4} \right) \approx 4,3 \text{ мс.}$$

Соответственно, период колебаний:

$$T = \tau^+ + \tau^- \approx 12,9 \text{ мс.}$$

Скважность импульсов:

$$Q = T / \tau^+ \approx 3.$$

1.2.2. Задание на математическое моделирование мультивибратора в среде Maple

1. Запустить среду математического моделирования Maple версии 15.00.
2. Инициализировать среду и подключить модуль с базовым набором математических инструментов для студентов инженерных специальностей следующими командами:
> `restart: with(student):`
3. Задать закон изменения напряжения на конденсаторе как функцию времени и 4 параметров (сопротивление резистора R , емкость конденсатора C , входное напряжение U_{IN} и начальное напряжение на конденсаторе $U_C(0)$):
> `U[CAP] := (t,R,C,UIN,UC0) -> UIN - (UIN - UC0) * exp(-t/(R*C));`
4. Задать исходные параметры для схемы мультивибратора (сопротивление резисторов R_1, R_2, R_3, R_4 , емкость конденсатора C_1 , напряжения насыщения выхода операционного усилителя U_{SAT} и падение напряжение на диодах U_{FD}):
> `R1:=160000; R2:=320000; R3:=160000; R4:=910000; C1:=10e-9;
U[SAT]:= 14.1; U[TH]:= (U[SAT]*R4)/(R3+R4); U[FD]:= 0.4;`
5. Рассчитать время «первоначального» заряда конденсатора τ_0^+ , решая уравнение:
> `tau[0]:=solve(U[CAP](t,R1,C1,U[SAT]-U[FD],0)=U[TH],t);`
6. Рассчитать время последующих разрядов конденсатора τ^- , решая уравнение:
> `tau[n]:=solve(U[CAP](t,R2,C1,-U[SAT]+U[FD],U[TH])=-U[TH],t);`
7. Рассчитать время последующих зарядов конденсатора τ^+ , решая уравнение:
> `tau[p]:=solve(U[CAP](t,R1,C1,U[SAT]-U[FD],-U[TH])=U[TH],t);`
8. Рассчитать временные метки для моделирования работы мультивибратора на четырех отрезках времени (первоначальный заряд, разряд, заряд и разряд конденсатора):
> `t1:=tau[0]; t2:=t1+tau[n]; t3:=t2+tau[p]; t4:=t3+tau[n];`
9. Сформировать функцию выходного напряжения по 4 отрезкам, используя функцию Хэвисайда и заданное напряжение насыщения выхода операционного усилителя:
> `U[OUT]:= (t) -> U[SAT]*(Heaviside(t)-Heaviside(t-t1))
-U[SAT]*(Heaviside(t-t1)-Heaviside(t-t2))
+U[SAT]*(Heaviside(t-t2)-Heaviside(t-t3))
-U[SAT]*(Heaviside(t-t3)-Heaviside(t-t4));`

10. Сформировать функцию напряжения на конденсаторе по 4 отрезкам, используя функцию Хэвисайда и заданный закон изменения напряжения на конденсаторе:

```
> U[COND] := (t) -> U[CAP](t,R1,C1,U[SAT]-U[FD],0)
      *(Heaviside(t)-Heaviside(t-t1))
      +U[CAP](t-t1,R2,C1,-U[SAT]+U[FD],U[TH])
      *(Heaviside(t-t1)-Heaviside(t-t2))
      +U[CAP](t-t2,R1,C1,U[SAT]-U[FD],-U[TH])
      *(Heaviside(t-t2)-Heaviside(t-t3))
      +U[CAP](t-t3,R2,C1,-U[SAT]+U[FD],U[TH])
      *(Heaviside(t-t3)-Heaviside(t-t4)) :
```

11. Построить графики сформированных функций выходного напряжения и напряжения на конденсаторе, совместив их для наглядности на одном рисунке:

```
> plot([U[COND](t),U[OUT](t)],t=0..t4,color=[blue,red]);
```

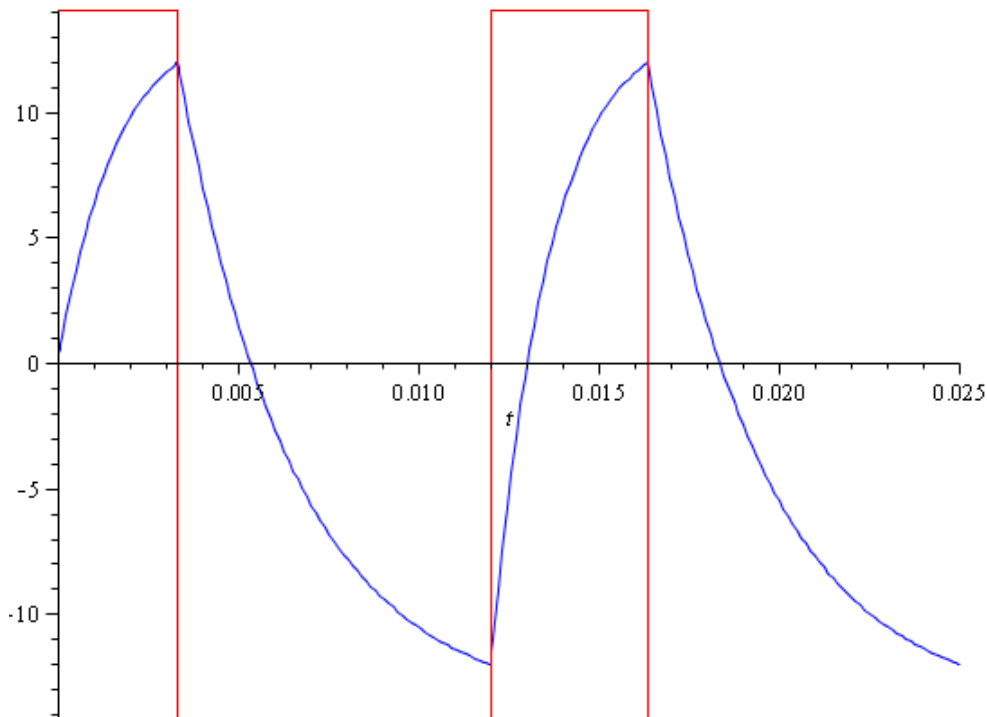


Рис. 2.3. Графики выходного напряжения и напряжения на конденсаторе.

2. Математическое моделирование задач теории надежности

2.1. Расчет показателей надежности дублированных восстанавливаемых систем на базе программирования расчетных формул в среде Maple

2.1.1. Теоретическое описание моделей надежности дублированных систем

Задана дублированная система с двумя идентичными элементами с интенсивностями отказов λ и восстановления μ с экспоненциальными законами распределения времени отказов и времени восстановлений. Тогда, марковская цепь и математическая модель для расчета вероятностей всех состояний системы:

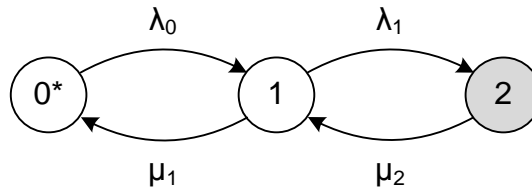


Рис. 3.1. Исходная цепь Маркова для дублированной системы.

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0(0) = 1; \quad P_1(0) = 0; \quad P_2(0) = 0; \\ P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1; \\ \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t); \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda_0 P_0(t) - (\mu_1 + \lambda_1) P_1(t) + \mu_2 P_2(t); \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_1 P_1(t) - \mu_2 P_2(t). \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Состояние 0 – оба элемента работоспособны, состояние 1 – один из элементов неработоспособен, состояние 2 – оба элемента неработоспособны.

- 1) При нагруженном резервировании и неограниченном ремонте:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 = 2\lambda; \quad \lambda_1 = \lambda; \\ \mu_1 = \mu; \quad \mu_2 = 2\mu. \end{array} \right.$$

- 2) При нагруженном резервировании и одной ремонтной бригаде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 = 2\lambda; \quad \lambda_1 = \lambda; \\ \mu_1 = \mu; \quad \mu_2 = \mu. \end{array} \right.$$

- 3) При ненагруженном резервировании и неограниченном ремонте:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 = \lambda; \quad \lambda_1 = \lambda; \\ \mu_1 = \mu; \quad \mu_2 = 2\mu. \end{array} \right.$$

- 4) При ненагруженном резервировании и одной ремонтной бригаде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 = \lambda; \quad \lambda_1 = \lambda; \\ \mu_1 = \mu; \quad \mu_2 = \mu. \end{array} \right.$$

Общее решение системы в виде функции вероятностей состояний системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0(t) = \frac{\mu_1 \mu_2}{\beta^2} + e^{-\alpha t} \left(\frac{\lambda_0 (\mu_2 + \lambda_1)}{\beta^2} \operatorname{ch}(t \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) + \left(\frac{\lambda_0 (\mu_2 + \lambda_1)}{\beta^2} - \frac{\lambda_0}{\alpha} \right) \frac{\alpha \cdot \operatorname{sh}(t \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \right); \\ P_1(t) = \frac{\lambda_0 \mu_2}{\beta^2} - e^{-\alpha t} \left(\frac{\lambda_0 \mu_2}{\beta^2} \operatorname{ch}(t \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) + \left(\frac{\lambda_0 \mu_2}{\beta^2} - \frac{\lambda_0}{\alpha} \right) \frac{\alpha \cdot \operatorname{sh}(t \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \right); \\ P_2(t) = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\beta^2} \left(1 - e^{-\alpha t} \left(\operatorname{ch}(t \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) + \frac{\alpha \cdot \operatorname{sh}(t \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \right) \right); \\ 2\alpha = \lambda_0 + \lambda_1 + \mu_1 + \mu_2; \quad \beta^2 = \mu_2 (\mu_1 + \lambda_0) + \lambda_0 \lambda_1. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Стационарные значения вероятностей состояний системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0(\infty) = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 \mu_2 + \lambda_0 \mu_2 + \lambda_0 \lambda_1}; \\ P_1(\infty) = \frac{\lambda_0 \mu_2}{\mu_1 \mu_2 + \lambda_0 \mu_2 + \lambda_0 \lambda_1}; \\ P_2(\infty) = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2 + \lambda_0 \mu_2 + \lambda_0 \lambda_1}. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Граф и математическая модель для расчета среднего времени перехода $0 \rightarrow 2$:

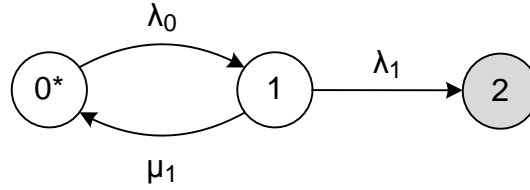


Рис. 3.2. Редуцированная цепь Маркова для расчета среднего времени перехода $0 \rightarrow 2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0(0) = 1; \quad P_1(0) = 0; \quad P_2(0) = 0; \\ P_0(\infty) = 0; \quad P_1(\infty) = 0; \quad P_2(\infty) = 1; \\ P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1; \\ \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t); \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda_0 P_0(t) - (\mu_1 + \lambda_1) P_1(t); \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_1 P_1(t). \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Вероятность безотказной работы (нахождения в состояниях 0 или 1) системы в течение заданного интервала времени при начальном состоянии 0:

$$P_{U0}(\Delta t) = P_0(\Delta t) + P_1(\Delta t) = e^{-\theta \Delta t} \left(\operatorname{ch}(\Delta t \sqrt{\theta^2 - \lambda_0 \lambda_1}) + \frac{\theta \cdot \operatorname{sh}(\Delta t \sqrt{\theta^2 - \lambda_0 \lambda_1})}{\sqrt{\theta^2 - \lambda_0 \lambda_1}} \right); \quad (3.5)$$

$$2\theta = \lambda_0 + \lambda_1 + \mu_1.$$

Среднее время наработки системы до первого отказа (время перехода $0 \rightarrow 2$):

$$T_{02} = \int_0^{\infty} t \frac{dP_2(t)}{dt} dt = \int_0^{\infty} (1 - P_2(t)) dt = - \int_0^{\infty} \left(\frac{\mu_1 + \lambda_0 + \lambda_1}{\lambda_0 \lambda_1} \frac{dP_0(t)}{dt} + \frac{\mu_1 + \lambda_0}{\lambda_0 \lambda_1} \frac{dP_1(t)}{dt} \right) dt = \frac{\mu_1 + \lambda_0 + \lambda_1}{\lambda_0 \lambda_1}. \quad (3.6)$$

Граф и математическая модель для расчета среднего времени перехода 1 → 2:

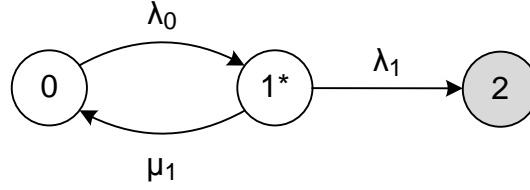


Рис. 3.3. Редуцированная цепь Маркова для расчета среднего времени перехода 1 → 2.

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0(0) = 0; \quad P_1(0) = 1; \quad P_2(0) = 0; \\ P_0(\infty) = 0; \quad P_1(\infty) = 0; \quad P_2(\infty) = 1; \\ P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1; \\ \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t); \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda_0 P_0(t) - (\mu_1 + \lambda_1) P_1(t); \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_1 P_1(t). \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Вероятность безотказной работы (нахождения в состояниях 0 или 1) системы в течение заданного интервала времени при начальном состоянии 1:

$$P_{U1}(\Delta t) = P_0(\Delta t) + P_1(\Delta t) = e^{-\theta \Delta t} \left(\operatorname{ch}(\Delta t \sqrt{\theta^2 - \lambda_0 \lambda_1}) + \frac{(\theta - \lambda_1) \cdot \operatorname{sh}(\Delta t \sqrt{\theta^2 - \lambda_0 \lambda_1})}{\sqrt{\theta^2 - \lambda_0 \lambda_1}} \right); \quad (3.8)$$

$$2\theta = \lambda_0 + \lambda_1 + \mu_1.$$

Среднее время наработки системы на отказ (время перехода 1 → 2):

$$T_{12} = \int_0^{\infty} t \frac{dP_2(t)}{dt} dt = \int_0^{\infty} (1 - P_2(t)) dt = - \int_0^{\infty} \left(\frac{\mu_1 + \lambda_0 + \lambda_1}{\lambda_0 \lambda_1} \frac{dP_0(t)}{dt} + \frac{\mu_1 + \lambda_0}{\lambda_0 \lambda_1} \frac{dP_1(t)}{dt} \right) dt = \frac{\mu_1 + \lambda_0}{\lambda_0 \lambda_1}. \quad (3.9)$$

Граф и математическая модель для расчета среднего времени перехода 2 → 1:

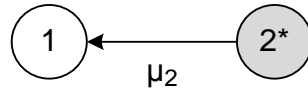


Рис. 3.4. Редуцированная цепь Маркова для расчета среднего времени перехода 2 → 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1(0) = 0; \quad P_2(0) = 1; \\ P_1(\infty) = 1; \quad P_2(\infty) = 0; \\ P_1(t) + P_2(t) = 1; \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = \mu_2 P_2(t); \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = -\mu_2 P_2(t). \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Вероятность безуспешного ремонта (нахождения в состоянии 2) системы в течение заданного интервала времени при начальном состоянии 2:

$$P_{D2}(\Delta t) = P_2(\Delta t) = e^{-\mu_2 \Delta t}. \quad (3.11)$$

Среднее время восстановления (время перехода 2 → 1) системы:

$$T_{21} = \int_0^{\infty} t \frac{dP_1(t)}{dt} dt = \int_0^{\infty} (1 - P_1(t)) dt = - \frac{1}{\mu_2} \int_0^{\infty} \frac{dP_2(t)}{dt} dt = \frac{1}{\mu_2}. \quad (3.12)$$

Нестационарный коэффициент готовности системы:

$$K_{\Gamma}(t) = P_0(t) + P_1(t) = \frac{\mu_2(\mu_1 + \lambda_0)}{\beta^2} + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\beta^2} e^{-\alpha t} \left(\operatorname{ch}(t\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) + \frac{\alpha \cdot \operatorname{sh}(t\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \right); \quad (3.13)$$

$$2\alpha = \lambda_0 + \lambda_1 + \mu_1 + \mu_2; \quad \beta^2 = \mu_2(\mu_1 + \lambda_0) + \lambda_0\lambda_1.$$

Стационарный коэффициент готовности системы:

$$K_{\Gamma C} = K_{\Gamma}(\infty) = \frac{\mu_2(\mu_1 + \lambda_0)}{\mu_2(\mu_1 + \lambda_0) + \lambda_0\lambda_1} = \frac{T_{12}}{T_{12} + T_{21}}. \quad (3.14)$$

Коэффициент оперативной готовности системы в течение заданного интервала, начиная с заданного момента времени:

$$R(t, \Delta t) = P_0(t)P_{U0}(\Delta t) + P_1(t)P_{U1}(\Delta t). \quad (3.15)$$

2.1.2. Задание на программирование расчетных формул и выполнение расчетов показателей надежности дублированной системы

Для заданной интенсивности отказов $\lambda = 0,002 \text{ час}^{-1}$ и восстановления $\mu = 0,008 \text{ час}^{-1}$ элементов дублированной системы, запрограммировать в Maple и осуществить расчет:

- Вероятностей состояний и коэффициента готовности в момент времени $t = 100$.
- Стационарные вероятности состояний и стационарный коэффициент готовности.
- Вероятность безотказной работы системы в течение интервала $\Delta t = 20$ часов при начальном состоянии 0.
- Среднее время наработки до первого отказа.
- Среднее время наработки на отказ.
- Среднее время восстановления.
- Коэффициент оперативной готовности с $t = 100$ часов и в течение $\Delta t = 20$ часов.

Выполнить расчета вышеуказанных показателей надежности для четырех случаев дублированных систем:

- 1) При нагруженном резервировании и неограниченном ремонте.
- 2) При нагруженном резервировании и одной ремонтной бригаде.
- 3) При ненагруженном резервировании и неограниченном ремонте.
- 4) При ненагруженном резервировании и одной ремонтной бригаде.

Список литературы

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. - 13-е изд. - М.: Наука, 1986.
2. Дьяконов В.П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. - М.: ДМК Пресс, 2011.
3. Опадчий Ю.Ф., Глудкин О.П., Гуров А.И. Аналоговая и цифровая электроника. - М.: Горячая линия - Телеком, 2007.
4. Титце У., Шенк К. Полупроводниковая схемотехника: в 2 т. - М.: Додэка-XXI, 2008.
5. Черкесов Г.Н. Надежность аппаратно-программных комплексов. - СПб.: Питер, 2005.
6. Половко А.М., Гуров С.В. Основы теории надежности. - СПб.: БХВ-Петербург, 2006.
7. I. Koren, С.М. Krishna. Fault-Tolerant Systems. - Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2007.
8. M.L. Shooman. Reliability of computer systems and networks. - John Wiley & Sons Inc., 2002.
9. Рахман П.А., Каяшев А.И., Шарипов М.И. Марковская цепь гибели и размножения в моделях надежности технических систем //Вестник УГАТУ. - 2015. - Т. 19. - № 1 (67). - С. 140-154.
10. Рахман П.А. Топологический метод расчета среднего времени наработки до первого отказа систем управления на базе специального преобразования цепи Маркова //Экономика и менеджмент систем управления. - 2016. - Т. 22. - № 4.1. - С. 177-193.

Содержание

1. Математическое моделирование электронных схем.....	1
1.1. Математическое моделирование полосового фильтра с мостом Вина.....	1
1.1.1. Теоретический анализ полосового фильтра и расчет его характеристик.....	1
1.1.2. Задание на математическое моделирование полосового фильтра в среде Maple.....	4
1.2. Математическое и имитационное моделирование асимметричного мультивибратора на базе операционного усилителя	7
1.2.1. Теоретическое исследование мультивибратора и расчет характеристик.....	7
1.2.2. Задание на математическое моделирование мультивибратора в среде Maple	10
2. Математическое моделирование задач теории надежности.....	12
2.1. Расчет показателей надежности дублированных восстанавливаемых систем на базе программирования расчетных формул в среде Maple.....	12
2.1.1. Теоретическое описание моделей надежности дублированных систем	12
2.1.2. Задание на программирование расчетных формул и выполнение расчетов показателей надежности дублированной системы	15
2.2. Расчет средней наработки до первого отказа системы на базе математического моделирования цепи Маркова гибели и размножения.....	16
2.2.1. Теоретическое описание методов расчета средней наработки до первого отказа системы на базе моделирования цепи Маркова гибели и размножения	16
2.2.2. Задание на программирование методов расчета средней наработки до первого отказа системы на базе моделирования цепи Маркова гибели и размножения.....	18
Список литературы	19