Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уфимский государственный нефтяной технический университет»

Кафедра электротехники и электрооборудования предприятий

Статистическое оценивание. Точечные и интервальные оценки. Методы оценивания.

Учебно-методическое пособие
для выполнения практической работы по дисциплине
«Теоретические и экспериментальные методы научных исследований»

Уфа
2019

Учебно-методическое пособие разработано для выполнения практической работы по дисциплине «Теоретические и экспериментальные методы научных исследований» для студентов УГНТУ направлений 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника» (МАЭ) очной и заочной форм обучения и 13.04.01 «Теплоэнергетика и теплотехника» (МТЭ) очной формы обучения.

В пособии приведены общие сведения о статистическом оценивании и его видах, также перечислены методы оценивания.

В пособии даны характеристики различным методам оценивания, приведены примеры точечных и интервальных оценок.

Публикуется в авторской редакции.

Составители: Хазиева Р.Т., канд. техн. наук, ст. преподаватель каф. ЭЭП
Стрельников Д.С., магистрант группы МАЭ02-19-01

Рецензенты: Рябишина Л.А., канд. техн. наук, доц. каф. ЭЭП
Хакимьянов М.И., д-р техн. наук, доц. каф. ЭЭП

Содержание

Введение

Программы подготовки студентов направлений 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника» (МАЭ) очной и заочной форм обучения и 13.04.01 «Теплоэнергетика и теплотехника» (МТЭ) очной формы обучения предусматривают изучение дисциплины «Теоретические и экспериментальные методы научных исследований». В рамках освоения указанной дисциплины студенты выполняют практическую работу «Статистическое оценивание. Точечные и интервальные оценки. Методы оценивания».

Цель практической работы по теме «Статистическое оценивание. Точечные и интервальные оценки. Методы оценивания» заключается в изучении общих сведении о статическом оценивании и ознакомлении с методами оценивания.

Основной принцип данного пособия – помощь студентам в освоении различных методов нахождения оценок и дать общее представление о статистическом оценивании. Результатом выполнения практической работы должно являться понимание обучающимися задач статистического оценивания неизвестных параметров. Для более подробного изучения рекомендуемая литература приведена в конце данного учебно-методического пособия.

Практическая работа по теме

«Статистическое оценивание. Точечные и интервальные оценки.

Методы оценивания»

Цель работы: ознакомление со статическим оцениваем, точечными и интервальными оценками и методами оценивания.

Статистическое оценивание

Статистической оценкой неизвестного параметра теоретического распределения называют функцию от наблюдаемых случайных величин.

Задача статистического оценивания неизвестных параметров - одна из двух основных (наряду с задачей проверки статистических гипотез) задач математической статистики.

Предположим, что имеется параметрическое семейство распределений вероятностей $F(t,\theta)$ (для простоты будем рассматривать распределение случайных величин и случай одного параметра). Здесь $\theta \in \mathbb{R}$ - числовой параметр, значение которого неизвестно. Требуется оценить его по имеющейся выборке $X^n = (X_1, \ldots, X_n)$ значений, порожденной данным распределением.

Различают два основных типа оценок: точечные оценки и доверительные интервалы.

Точечное оценивание

Точечное оценивание - это вид статистического оценивания, при котором значение неизвестного параметра θ приближается отдельным числом. То есть необходимо указать функцию от выборки (статистику)

$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X^n)$,

значение которой будет рассматриваться в качестве приближения к неизвестному истинному значению θ.

К общим методам построения точечных оценок параметров относятся: метод максимального правдоподобия, метод моментов, метод квантилей.

Ниже приводятся некоторые свойства, которыми могут обладать или не обладать точечные оценки.

1) Состоятельность:

Одно из самых очевидных требований к точечной оценке заключается в том, чтобы можно было ожидать достаточно хорошего приближения к истинному значению параметра при достаточно больших значениях объема выборки n. Это означает, что оценка $\widehat{\theta}_n$ должна сходиться к истинному значению θ при $n \to \infty$. Это свойство оценки и называется состоятельностью. Поскольку речь идет о случайных величинах, для которых имеются разные виды сходимости, то и данное свойство может быть точно сформулировано по-разному:

- если $\widehat{\theta}_n$ сходится к истинному значению θ с вероятностью 1 (почти наверное), то тогда оценка называется сильно состоятельной;
- если имеет место сходимость по вероятности $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$, то тогда оценка называется слабо состоятельной.

Когда употребляют просто термин *состоятельность*, то обычно имеется в виду слабая состоятельность, т.е. сходимость по вероятности.

Условие состоятельности является практически обязательным для всех используемых на практике оценок. Несостоятельные оценки используются крайне редко.

2) Несмещенность и асимптотическая несмещенность:

Оценка $\widehat{\theta}_n$ параметра θ называется несмещенной, если ее математическое ожидание равно истинному значению оцениваемого параметра:

$\mathbb{E}\widehat{\theta}_n = \theta$.

Более слабым условием является асимптотическая несмещенность, которая означает, что математическое ожидание оценки сходится к истинному значению параметра с ростом объема выборки:

$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\widehat{\theta}_n = \theta$.

Несмещенность является рекомендуемым свойством оценок. Однако не следует слишком переоценивать его значимость. Чаще всего несмещенные оценки параметров существуют и тогда стараются рассматривать только их. Однако могут быть такие статистические задачи, в которых несмещенных оценок не существует. Наиболее известным примером является следующий: рассмотрим распределение Пуассона с параметром λ и поставим задачу оценки параметра $\theta = 1/\lambda$. Можно доказать, что для этой задачи не существует несмещенной оценки.

3) Сравнение оценок и эффективность:

Для сравнения между собой различных оценок одного и того же параметра применяют следующий метод: выбирают некоторую *функцию риска*, которая измеряет отклонение оценки от истинного значения параметра, и лучшей считают ту, для которой эта функция принимает меньшее значение.

Чаще всего в качестве функции риска рассматривают математическое ожидание квадрата отклонения оценки от истинного значения

$\mathbb{E}(\widehat{\theta}_n - \theta)^2$

Для несмещенных оценок это есть просто дисперсия $D\widehat{\theta}_n$.

Существует нижняя граница на данную функцию риска, называемая *неравенство Крамера-Рао*.

(Несмещенные) оценки, для которых достигается эта нижняя граница (т.е. имеющие минимально возможную дисперсию), называются эффективными. Однако существование эффективной оценки есть довольно сильное требование на задачу, которое имеет место далеко не всегда.

Более слабым является условие асимптотической эффективности, которое означает, что отношение дисперсии несмещенной оценки к нижней границе Крамера-Рао стремится к единице при $n \to \infty$.

Заметим, что при достаточно широких предположениях относительно исследуемого распределения, метод максимального правдоподобия дает асимптотически эффективную оценку параметра, а если существует эффективная оценка - тогда он дает эффективную оценку.

4) Достаточные статистики:

Статистика $T_n = T_n(X_1,\ldots,X_n)$ называется достаточной для параметра θ, если условное распределение выборки $X^n = (X_1,\ldots,X_n)$ при условии того, что $T_n = a$, не зависит от параметра θ для всех $a \in \mathbb{R}$.

Важность понятия достаточной статистики обуславливается следующим утверждением. Если T_n - достаточная статистика, а $\widehat{\theta}_n$ - несмещенная оценка параметра θ, тогда условное математическое ожидание $\mathbb{E}(\widehat{\theta}_n|T_n)$ является также несмещенной оценкой параметра θ, причем ее дисперсия меньше или равна дисперсии исходной оценки $\widehat{\theta}_n$.

Напомним, что условное математическое ожидание $\mathbb{E}(\widehat{\theta}_n|T_n)$ есть случайная величина, являющаяся функцией от T_n. Таким образом, в классе несмещенных оценок достаточно рассматривать только такие, которые являются функциями от достаточной статистики (при условии, что такая существует для данной задачи).

(Несмещенная) эффективная оценка параметра всегда является достаточной статистикой.

Доверительные интервалы

Другим типом оценок статистических параметров являются доверительные интервалы.

Доверительный интервал - это случайный интервал, построенный по выборке (верхняя и нижняя границы этого интервала должны быть статистиками), который содержит (накрывает) истинное значение параметра с вероятностью, не меньшей заданного значения.

Доверительные интервалы используются, когда нам нужны надежные границы, в которые попадает значение оцениваемого параметра.

Часто вместе с точечной оценкой параметра строят доверительный интервал, середина которого равна этой оценке. Его ширина является наглядной характеристикой того, насколько точна может быть данная точечная оценка.

Иногда бывает наоборот: естественным образом строится некоторый доверительный интервал, а в качестве точечной оценки параметра рассматривают его середину.

Методы оценивания

Различают следующие методы нахождения оценок: метод моментов, метод максимального правдоподобия, метод наименьших квадратов.

1) Метод максимального правдоподобия.

Метод наибольшего (максимального) правдоподобия (МНП)(ММП) обладает следующими достоинствами:

1. Всегда приводит к состоятельным оценкам (иногда смещенным)

2. Получаемые оценки распределены асимптотически нормально и имеют минимально возможную дисперсию по сравнению с другими асимптотически нормальными оценками.

Недостаток: требуется решать громоздкие системы уравнений.

Имеется СВ X, f(x,q) – функция ее плотности вероятности, выражение которой известно.

q– неизвестный параметр, подлежащий оценке.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$–nнезависимых наблюдений над СВx.

В основе МНП лежит функция L(q) – функция правдоподобия, формирующаяся с учетом свойств многомерной функции распределения наблюдений над СВ x.

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, q) = f(x_1, q) \times f(x_2, q) \times \ldots \times f(x_n, q)$

В указанное равенство подставляются данные и получаем функцию L(q):

$L(q) = f(x_1, q) \times f(x_2, q) \times \ldots \times f(x_n, q)$

За максимальное правдоподобное значение параметра qпринимаем $\hat{\theta}_n$, при которойL(q) максимально.

2) Метод моментов (Метод Пирсона).

Метод обладает следующими достоинствами:

Оценки получаемые этим методом всегда являются состоятельными.

Метод моментов мало зависит от закона распределения случайной величины.

Сложность вычисления незначительна.

Известна случайная величина X, которая характеризуется $f(x, \theta_1, \theta_2 \ldots \theta_q)$, аналитический вид этой функции известен.

По выборке объёмом n$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$– значения случайной величины в выборке вычисляем эмпирические начальные моменты случайной величины:

$$\tilde{M}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \tilde{M}_1(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

$$\tilde{M}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \tilde{M}_2(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

$$\tilde{M}_q = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \tilde{M}_q(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

Находим теоретические моменты:

$$M_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q) dx = M_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q)$$

$$M_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q) dx = M_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q)$$

$$M_q = \int_{-\infty}^{\infty} x^q f(x, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q) dx = M_q(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q)$$

Основная идея метода моментов заключается в приравнивании значения эмпирических значений моментов теоретическим.

3) Метод наименьших квадратов.

Параметры уравнения регрессии определяются методом наименьших квадратов, предложенным Лагранжем и Гауссом, который сводится к следующему.

Строятся квадратичные формы:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (x_i - e)^2 \to \min$$

x_i– измеренное значение переменной,

е- истинное или теоретическое значение этой величины.

Требуется, чтобы сумма квадратов отклонений измеренных значений относительно истинных была минимальна.

Контрольные вопросы

1. Что такое статическое оценивание?
2. Какие типы оценок различают и в чем их главные особенности?
3. Какие основные свойства точечных оценок?
4. Какие методы оценивание существуют?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика. — М.: Физматлит, 2006. — 816 с.

2. Гарольд Крамер. Математические методы статистики. — М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. — 631 с.

3. под ред. В.С. Королюка. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. — Киев: Наукова думка, 1978. — 582 с.